関数解析学特論I 第2回

1. 関数解析学への準備

まず微分積分と線形代数の諸概念について, 関数解析学に使えるように準備しよう.

1.1. 数列の収束・発散

まずは点列, 関数列の収束を考えるため, 数列の収束について考えよう. 基本的には,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \text{ と } a \text{ の}\textbf{距離}\text{が } 0 \text{ に収束する}$$

と考えよう.

定義 1.1

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とは, **どんな小さな誤差 $\varepsilon > 0$ が与えられても, ある番号 N から先の a_n は a から誤差 $\pm\varepsilon$ の範囲内に収まることが保証できるとき**をいう.

  すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある番号 N で

  $$n > N \text{ ならば}, \ |a_n - a| < \varepsilon$$

  が成り立つものが存在するとき, 数列 a_n は a に**収束する** (a_n converges to a) といい,

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{または} \quad a_n \to a \ (n \to \infty)$$

  などと記す.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とは, **どんな大きな正の数 $R > 0$ が与えられても, ある番号 N から先の a_n は $a_n > R$ となることが保証できるとき**をいう.

  すなわち, 任意の $R > 0$ に対しある番号 N で

  $$n > N \text{ ならば}, \ a_n > R$$

  が成り立つものが存在するとき, 数列 a_n は ∞ に発散するといい,

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{または} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

  などと記す.

- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ のとき, a_n は単に**発散する**という.

注意: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ は各自定義してみよう.

注意: 上の定義およびそれに即した収束などの証明論法を ε-N 論法, または ε-δ 論法という.

例 1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ を示せ.

[解答例] $\varepsilon>0$ を任意に取る. このとき番号 N を $\frac{1}{N}<\varepsilon$ をみたすように取れば, $n>N$ のとき,

$$0<a_n=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

を得る. したがって $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ が成り立つので, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. □

注意: $\frac{1}{N}<\varepsilon$ をみたすように N が取れるか? については定理 1.4 参照のこと.

極限の基本的性質

命題 1.2 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

(2) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$.

(3) $a\neq 0$ のとき, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{b}{a}$.

注意: 命題 1.2 は a_n, b_n の極限値がきちんと実数値に定まらないと成立しないことに注意する.

命題 1.3 (はさみうちの原理 (Squeeze theorem)) 数列 a_n, b_n, c_n はすべての自然数 n において $a_n\leq b_n\leq c_n$ が成り立つとする. このとき次が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$.

(2) $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n$ ならば $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n$.

注意: 命題 1.3 について, (1) の $\lim_{n\to\infty}a_n$ と (2) の $\lim_{n\to\infty}c_n$ については何も言えない. (3) の $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n$ は ∞, $-\infty$ でもよい.

これらの証明は ε-N 論法の良い練習問題なので各自確かめよ.

実数の連続性

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ もしくは $\lim_{n\to\infty}n=\infty$ の証明においては, 以下の基本的な原理が必要になる.

定理 1.4 (アルキメデスの順序原理) 任意の正の数 a, b に対し, $Na>b$ となる自然数 N が存在する.

これを証明するには**実数の性質**に立戻らねばならない.

実は現代数学において, 実数の集合上では次の 3 つの性質を理論の前提として仮定する (そのような仮定を**公理 (Axiom)** と呼ぶ.)

(1) 任意の 2 数 a, b に対し, 四則演算 ($a+b$, $a-b$, $a \times b$, $a \div b$) ができる.

(2) 任意の 2 数 a, b に対し, $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれか一つが必ず成立する.

(3) **(連続性公理)** 数直線は途切れない.

実数の集合最大の特徴は (3) の**実数の連続性**にある. これを理論に利用可能な命題にするにあたり, 概念をいくつか準備する.

定義 1.5 (有界, 上限)

- 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**上に有界 (bounded from above)** であるとは, ある実数 $M \in \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in A$ に対し $a \leq M$ となるものが存在するときをいう.
  このときの M を A の**上界 (upper bound)** という.
- 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**下に有界 (bounded from below)** であるとは, ある実数 $M \in \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in A$ に対し $a \geq M$ となるものが存在するときをいう.
  このときの M を A の**下界 (lower bound)** という.
- 集合 A が**有界 (bounded)** であるとは, A が上かつ下に有界であるときをいう.
- A が上に有界であるとき, 上界の最小値を $\sup A$ と記し, これを A の**上限 (supremum)** という. 同様に, A の下界の最大値を $\inf A$ と記し, これを A の**下限 (infimum)** という.

注意: $M = \sup A$ であることと, 次の 2 条件は同値.

(1) 任意の $a \in A$ に対し $a \leq M$ となる.

(2) 任意の εA に対し, $M - \varepsilon < a_\varepsilon$ をみたす $a_\varepsilon \in A$ が存在する.

下限についても似たような 2 条件で定義を書き直すことができる (各自定義してみよ).

連続性公理を定めるにあたり, **集合の最大値や最小値は有界であっても存在するとは限らない**ことを想起しよう. (例えば $A = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$ は有界だが最小値も最大値も存在しない.)

実数の連続性公理 (上限の存在)　上に有界な集合は必ず上限を持つ.

この公理から次の定理 1.4 の他, 次の 3 つの定理が証明される.

定理 1.6 (有界単調数列の収束) 上に有界な単調増加数列は収束する.

定理 1.7 (区間縮小法) $I_n = [a_n, b_n]$ は次をみたすとせよ.

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$. すなわち

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

が成り立つ.

(2) $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$.

このとき, ある $a \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在して, 次の二つをみたす.

(a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} |$ すべての I_n に対し $x \in I_n\} = \{a\}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

定理 1.8 (デデキンド (Dedekind) の切断) $A, B \subset \mathbb{R}$ は次の 2 条件をみたすとせよ.

(1) $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$.

(2) 任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対し, $a < b$ が成り立つ.

このとき, 次の 2 つのうちいずれか一方のみが必ず成り立つ.

(a) A の最大値が存在する, B の最小値が存在しない.

(b) A に最大値が存在しない, B の最小値が存在する.

実は

- 上限の存在
- 有界単調数列の収束
- 区間縮小法+アルキメデスの順序原理
- デデキンドの切断

のうち, どれか一つを仮定すると残りの 3 つが全て出てくる. その意味で, 上の 4 つの命題はすべて同値な命題であり, このうちどれか一つを連続性公理として仮定する.

本講義は上限の存在をもって連続性公理とし, 上の 4 つの定理についてはすべて正しいとする.

連続性公理からは, 次の重要な定理を導くことができる.

定理 1.9 (Bolzano-Weierstrass の定理) 有界な数列は収束する部分列を持つ.